問題 3. 平面幾何

> $\triangle ABC$ において, 辺 AC, BC 上に点 D, E を取る．このとき
>
> $$\angle ABD : \angle CBD = 3:1, \quad AB = DE = EC, \quad DB = DC$$
>
> が成り立つ．$\angle BAC$ の大きさを求めよ．

$\angle DBC = \theta$ とする．$BA = BF$ の点 F を BC 上に取るとき

$$\triangle BFD \equiv \triangle CED \qquad (\because \angle FBD = \angle ECD, BD = CD, BF = CE) \tag{1}$$

$\angle BFD = 180^\circ - 2\theta, \angle BFA = 90^\circ - 2\theta$ より $\angle AFD = 90^\circ$．A から AB の垂線を引き, BD との交点を G とする．

$$\triangle ABG \equiv \triangle FDA \qquad (\because AB = FD, \angle BAG = \angle DFA, \angle ABG = \angle ADF) \tag{2}$$

よって $AG = FA, BG = DA$．$\triangle AFG$ で $\angle FGA = 2\theta, AF = AG$ より, $\angle AFG = 90^\circ - \theta$．$\angle GFD = \theta$ となり, $\angle BGF = 2\theta$

$$\triangle BFG \equiv \triangle AGD \qquad (BG = AD, FG = GD, \angle BGF = \angle ADG) \tag{3}$$

よって $AG = BF = FA$ となり $\triangle ABF$ は正三角形．$4\theta = 60^\circ$ より

$$\angle BAC = 180^\circ - 5\theta = 105^\circ \tag{4}$$

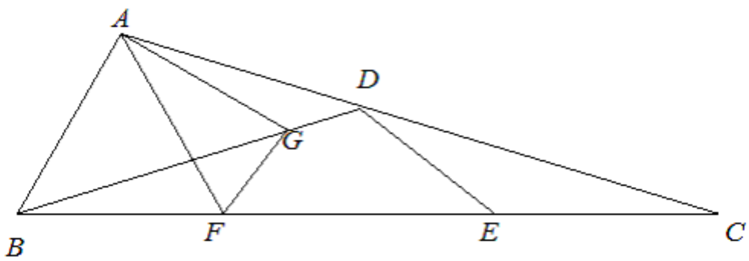

図 1