問題 4. *2* 次関数

> 頂点 $(x, y) = (p, q)$ の *2* 次関数 y がある.
>
> $$y = ax^2 - a\left(a^2 - 6a - 13\right)\left(2x - a^2 + 6a + 13\right) + a^2 - 5a - 12 \qquad (p \leqq x \leqq q)$$
>
> y の最大値が 0 のとき (p, q) を求めよ.

標準形にすると,

$$y = a\left(x^2 - a^2 + 6a + 13\right)^2 + a^2 - 5a - 12 \tag{1}$$

となる. 頂点に関する式 $p \leqq q$ より

$$a^2 - 6a - 13 \leqq a^2 - 5a - 12 \tag{2}$$
$$-1 \leqq a \neq 0 \tag{3}$$

(1) $-1 \leqq a < 0$ のとき

$$\max y = a^2 - 5a - 12 = 0 \quad (x = p) \tag{4}$$
$$\Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2} \tag{5}$$

これは不適

(2) $0 < a$ のとき不適 (2) $0 < a$ のとき

$$\max y = a\,(a+1)^2 + a^2 - 5a - 12 \quad (x = q) \tag{6}$$
$$= (a+3)(a+2)(a-2) = 0 \tag{7}$$
$$\Rightarrow a = -3, \pm 2 \tag{8}$$

$a = -3, -2$ は不適. $a = 2$ を代入して

$$\therefore (p, q) = (-21, -18) \tag{9}$$