

問題 5. 二重根号

|| a, b を正の有理数として二重根号 $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ が外せる条件を示せ.

$$a + \sqrt{b} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = (x + y) + \sqrt{4xy} \quad (1)$$

として x, y が有理数の解を持てばよい.

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = 4xy \end{cases} \quad (2)$$

を解いて

$$b = 4x(a - x) = -4x^2 + 4ax \quad (3)$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2} \quad (4)$$

$$\therefore a^2 - b = (\text{有理数})^2 \text{ のとき, 二重根号は外せる} \quad (5)$$