問題 6. 代数幾何

長さが 2, 6, 7, 9 の 4 つの線分で，円に内接する四角形 $ABCD$ を作る．対角線の交点を E とするとき，$\sin \angle AEB$ の最大値を求めよ．

円に内接する四角形の各辺の長さが a, b, c, d のとき，四角形の面積 S は $2s = a + b + c + d$ として

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{1}$$

と与えられるから，四角形の面積は $S = 30$．また，

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AEB \tag{2}$$

より，

$$\sin \angle AEB = \frac{60}{AC \cdot BD} \tag{3}$$

となる．トレミーの定理より

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA \tag{4}$$
$$\min AC \cdot BD = 2 \cdot 9 + 6 \cdot 7 = 60 \tag{5}$$

だから，

$$\max \sin \angle AEB = 1 \tag{6}$$

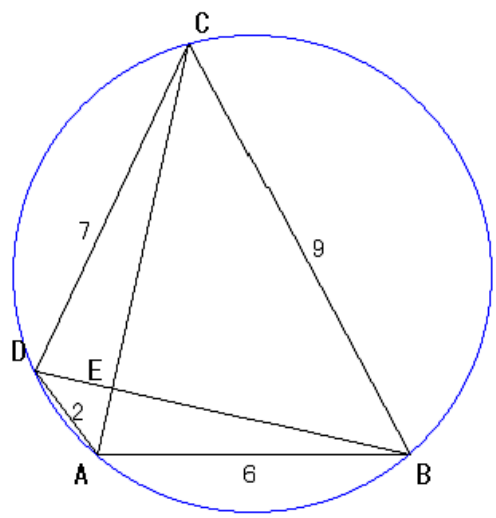

図 1