問題 7. 代数幾何

> 外接円の半径が 5/2, 内接円の半径が 1 の $\triangle ABC$ について, $AB \cdot BC \cdot CA = 60$ のとき, $\triangle ABC$ の各辺の長さを求めよ.

$AB = c, BC = a, CA = b$ とおく. $2s = a + b + c$, 三角形の面積 S, 内接円の半径 $r = 1$, 外接円の半径 $R = \frac{5}{2}$ とおく. 正弦定理より

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \angle A = \frac{abc}{4R} = 6 \tag{1}$$

内接円の半径と面積の関係より

$$S = sr = 6 \tag{2}$$

ヘロンの公式より

$$S = \sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)} = 6 \tag{3}$$

$$S^2 = 36 = 6\left(6-a\right)\left(6-b\right)\left(6-c\right) \tag{4}$$

$$(\text{中略}) \Rightarrow ab + bc + ca = 47 \tag{5}$$

式をまとめると

$$a + b + c = 12 \tag{6}$$

$$ab + bc + ca = 47 \tag{7}$$

$$abc = 60 \tag{8}$$

3 次方程式の解と係数の関係より a, b, c は

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = \left(x-3\right)\left(x-4\right)\left(x-5\right) = 0 \tag{9}$$

の解. したがって各辺の長さは

$$(a, b, c) = (3, 4, 5) \tag{10}$$

ただし順不同