

問題 8. 7次関数

複素数の範囲まで考えて、以下の方程式の解を求めよ.

$$128x^7 + 64x^6 - 224x^5 - 112x^4 + 104x^3 + 52x^2 - 6x - 3 = 0$$

両辺に $(x - \frac{1}{2})$ をかけて

$$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + \frac{3}{2} = 0 \quad (1)$$

$\cos \theta = t$ として $\cos 8\theta$ を展開すると

$$\cos 8\theta = 128t^8 - 256t^6 + 160t^4 - 32t^2 + 1 \quad (2)$$

方程式を解く問題は

$$\cos 8\theta = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

を解く問題に帰着できて

$$\cos \theta = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pm\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4} \quad (\text{複合任意}) \quad (4)$$

このうち $\frac{1}{2}$ は両辺に $(x - \frac{1}{2})$ をかけたことに起因する解だから除外して

$$x = -\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pm\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4} \quad (\text{複合任意}) \quad (5)$$