

問題 12. 整数問題

|| 自然数  $N$  に対して, 各桁の和を  $S_1(N)$  とおく.  $S_1(S_1(N))$  を  $S_2(N)$  とおく.  $S_n(N)$  は同様の操作を  $n$  回したことを表す.  $S_n(2004^n)$  が取りうる値を全て求めよ. ただし  $n$  は自然数.

$$S_1(2004^1) = 6 \quad (1)$$

$$S_2(2004^2) = S_2(4016016) = S_1(18) = 9 \quad (2)$$

$n \geq 2$  において  $S_n(2004^n) = 9$  を示す.  $n \geq 2$  において  $2004^n$  は 9 の倍数だから  $S_n(2004^n)$  も 9 の倍数  $2004^n < 10^{4n}$  より

$$S_1(2004^n) \leq S_1(\underbrace{99 \cdots 9}_{4n \text{ 個}}) = 9 \cdot 4n \quad (3)$$

$$S_1(2004^3) \leq 108 \Rightarrow S_2(2004^3) \leq S_1(99) = 18 \Rightarrow S_3(2004^3) \leq 9 \quad (4)$$

$$S_1(2004^4) \leq 144 \Rightarrow S_2(2004^4) \leq S_1(139) = 13 \Rightarrow S_3(2004^4) \leq S_1(9) = 9 \Rightarrow S_4(2004^4) \leq 9 \quad (5)$$

以下同様に

$$S_n(2004^n) \leq 9 \quad (6)$$

9 の倍数で 9 以下の自然数は 9 のみ.

$$\therefore 6, 9 \quad (7)$$