

問題 13. 整数問題

|| 各位に 0 を含まないような自然数の集合を S とし, S の要素のうち各位の和が n になるものの個数を $S(n)$ で表す. $S(15)$ を求めよ.

$S(n)$ は 1 回で 19 段の階段を上る事の出来る人が n 段の階段を上るときの上り方の総数に等しい. $n \leq 9$ に対して

$$S(1) = 1 \quad (1)$$

$$S(2) = 1 + S(1) = 2 \quad (2)$$

$$S(3) = 1 + \sum_{k=1}^2 S(k) = 4 \quad (3)$$

$$S(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} S(k) = 2^{n-1} \quad (4)$$

$n \geq 10$ に対して

$$S(n) = \sum_{k=1}^9 S(n-k) = 2S(n-1) - S(n-10) \quad (5)$$

逐次計算して

$$S(10) = 511, S(12) = 1021, S(13) = 2040, S(14) = 8144 \quad (6)$$

$$\therefore S(15) = 16272 \quad (7)$$