問題 15. 関数

> 以下の条件を満たす実数値連続関数 $f(x)$ を全て求めよ.
>
> $$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$$

$y=0$ を代入して

$$2f(x)=2f(x)+2f(0)\Rightarrow f(0)=0 \tag{1}$$

$x=0$ を代入して

$$f(y)+f(-y)=2f(y)\Rightarrow f(x)=f(-x) \tag{2}$$

$y=x, y=2x$ を代入して

$$f(2x)=4f(x) \tag{3}$$
$$f(3x)+f(-x)=2f(x)+2f(2x)\Rightarrow f(3x)=9f(x) \tag{4}$$

これより

$$f(nx)=n^2f(x)\quad (n\in\boldsymbol{N}) \tag{5}$$

と予測でき, 数学的帰納法により示す.

$(I)\, n=1$ のとき

$$f(1x)=1^2f(x) \tag{6}$$

$(II)\, n\leq k-1$ で $f(nx)=n^2f(x)$ と仮定するとき, $y=(k-1)x$ に対し

$$f(kx)+f((k-2)x)=f(kx)+(k-2)^2f(x)=2f(x)+2f((k-1)x)=2f(x)+2(k-1)^2f(x) \tag{7}$$
$$f(kx)=k^2f(x) \tag{8}$$

$(1),(2)$ より任意の自然数で $f(kx)=k^2f(x)$ となり $f(x)=f(-x)$ より任意の整数でも同様. また任意の有理数 $x=\frac{q}{p}$ に対し

$$p^2f(x)=f(px)=f(q)=q^2f(1) \tag{9}$$

より

$$f(x)=x^2f(1) \tag{10}$$

f は連続関数だから $\forall a\in\boldsymbol{R}$ に収束する有理数列 a_n に対し

$$f(a)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}a_n^2f(1)=a^2f(1) \tag{11}$$

改めて $f(1)=c$ とおいて

$$f(x)=cx^2 \tag{12}$$