問題 17. 整数問題

$||$ $7493x + 5273y = 2006$ を満たす整数 x, y に対し $|x+y|$ の最小値を求めよ.

$$7493x + 5273 = 2006 \tag{1}$$

の両辺を 59 で割って

$$127x + 97y = 34 \tag{2}$$

となる。ここで

$$127a + 97b = 1 \tag{3}$$

となる a, b を見つけ、両辺を 34 倍することで (x, y) の候補を見つける。ユークリッド互除法より

$$127 = 97 + 30, 97 = 30 \cdot 3 + 7, 30 = 7 \cdot 4 + 2, 7 = 2 \cdot 3 + 1 \tag{4}$$

となるから、これを変形して（拡張ユークリッドの互除法）

$$1 = 7 - 2 \cdot 3 = (97 - 30 \cdot 3) - (30 - 7 \cdot 4) \cdot 3 = 97 - 30 \cdot 6 + 7 \cdot 12 \tag{5}$$

$$= 97 - (127 - 97) \cdot 6 + (97 - 30 \cdot 3) \cdot 12 = -127 \cdot 6 + 97 \cdot 19 - 30 \cdot 36 \tag{6}$$

$$= -127 \cdot 6 + 97 \cdot 19 - (127 - 97) \cdot 36 = -127 \cdot 42 + 97 \cdot 55 \tag{7}$$

したがって

$$127 \cdot (-42) + 97 \cdot 55 = 1 \tag{8}$$

$$127 \cdot \underbrace{(-42 \cdot 34)}_{x} + 97 \cdot \underbrace{(55 \cdot 34)}_{y} = 34 \tag{9}$$

x, y の一般解は $127 \cdot 97k + 97 \cdot (-127k) = 0$ を両辺に足して

$$x = 97k - 42 \cdot 34 \tag{10}$$

$$y = -127k + 55 \cdot 34 \tag{11}$$

とおける。$x + y = 13 \cdot 34 - 30\boldsymbol{Z} = 13 \cdot 4 - 30\boldsymbol{Z} = 22 - 30\boldsymbol{Z}$ より

$$\min |x + y| = |-8| = 8 \tag{12}$$