問題 1. 整数問題

> a, b を互いに素なある定まった自然数とする．0 以上の整数 x, y を用いて整数 $k = ax + by$ を考える．k で表せない自然数の個数 $S(a, b)$ を求めよ

まず次の補題を証明する．

補題 1.

> b 個の自然数 $A = \{a, 2a, 3a, \ldots, ab\}$ を b で割った余りは全て異なり，$\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ の b 通りある．

Proof. a, b は互いに素だから，A の中で b で割り切れる自然数は ab のみ．今自然数 $ai, aj\ (1 \leq i < j \leq b)$ について b で割った余りが等しいとすると，$a(j-i) \in A$ は b の倍数となる．これは ab が A の中で唯一 b で割り切れる自然数であることに矛盾する．$\therefore A$ に属する自然数を b で割った余りは全て異なり，余りは b 通りとなる．□

b で割って i 余る自然数のうち $k = ax + by$ で表せる最小の自然数を N_i とおく．また，k で表せない自然数の個数を $R(i)$ すると

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{b-1} R(i) \tag{1}$$

である．

補題 1 より $N_1 = ap \in A$ で表せる．ap より大きい b で割って 1 余る自然数は $k = ap + by$ と書けるから

$$R(1) = \frac{ap - 1}{b} \tag{2}$$

となる．また $N_{b-1} = ab - ap \in A$ であり，上と同様にして

$$R(b-1) = \frac{ab - ap - (b-1)}{b} \tag{3}$$

となる．よって

$$R(1) + R(b-1) = a - 1 \tag{4}$$

以下同様に

$$R(2) + R(b-2) = a - 1 \tag{5}$$
$$R(3) + R(b-3) = a - 1 \tag{6}$$
$$\vdots$$
$$R(b-1) + R(1) = a - 1 \tag{7}$$

だから

$$S(a, b) = \frac{(a-1)(b-1)}{2} \tag{8}$$