

1 円に内接する四角形の様々な性質

円に内接する四角形には知っておくと便利な定理がいくつかあります。複雑な計算を必要とする問題も楽に解けたりします。

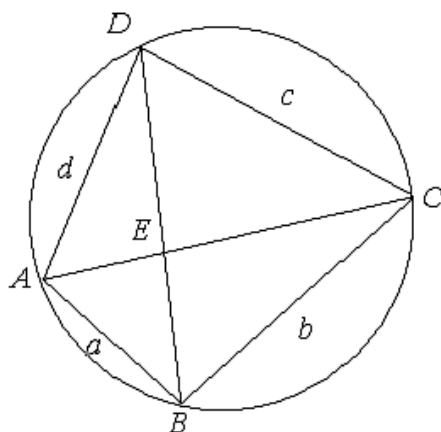


図 1

性質 1. トレミーの定理

円に内接する四角形において、対辺同士の長さの積和は対角線同士の長さの積に等しい。つまり

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD \quad (1)$$

証明は <http://homepage3.nifty.com/sugaku/toremi.htm> を参照

性質 2. 面積と各辺の関係式

円に内接する四角形 $ABCD$ の各辺の長さを a, b, c, d とする。 $2s = a + b + c + d$ として四角形の面積 S は

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad (2)$$

と表せる。

証明は <http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/menseki/sikakukei.html> を参照。 $d = 0$ でヘロンの公式になります。

性質 3.

円に内接する四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とすると

$$AE : EC = ad : bc \quad (3)$$

Proof.

$$AE : EC = \triangle ABD : \triangle CBD \quad (4)$$

$$= ad \sin A : bc \sin C \quad (5)$$

$$= ad : bc \quad (6)$$

□

これらを使う演習問題です。

問題 1.

|| $AB = 6, BC = 9, CD = 5, DA = 10$ の四角形 $ABCD$ が円に内接しているとき、以下の問に答えよ

1. 面積を求めよ
2. 対角線の交点を E とするとき、 $\sin \angle AEB$ を求めよ。

1. 面積と各辺の長さの関係式を使って解く
2. $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AEB$ を使って解く。 $AC \cdot BD$ はトレミーの定理から求める。