$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の固有値$\lambda$に対する固有ベクトルは何か。

$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$を解く。

(*1) $a-\lambda\neq 0$のとき、

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{b}{a-\lambda} \\ 0 & \dfrac{(d-\lambda)(a-\lambda)-bc}{a-\lambda} \end{pmatrix}$$

ここで、$det(A-\lambda E)=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$ だったから、

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{b}{a-\lambda} \\ 0 & \dfrac{(d-\lambda)(a-\lambda)-bc}{a-\lambda} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{b}{a-\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} b \\ \lambda-a \end{pmatrix}$$

(*2) $a-\lambda=0$ のとき、

$det(A-\lambda E)=-bc=0$

(*2-1) $b=0$ のとき、

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

(*2-1-1) $c\neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} \lambda-d \\ c \end{pmatrix}$$

(*2-1-2) $c=0$のとき(最初から対角化されているので実際には考えることはない)

$$\lambda-d\neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=k'\begin{pmatrix} b \\ \lambda-a \end{pmatrix}$$

$$\lambda-d=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(*2-2) $c=0$のとき、(上で$b=c=0$を考えたので $b\neq 0$とする。)

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=k'\begin{pmatrix} b \\ \lambda-a \end{pmatrix}$$

まとめ

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$を対角化せよ。という問題に対し、固有値が$\lambda$なら固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} b \\ \lambda-a \end{pmatrix}, k\begin{pmatrix} \lambda-d \\ c \end{pmatrix}$である。

$\begin{pmatrix} b \\ \lambda-a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$になったときに、$k\begin{pmatrix} \lambda-d \\ c \end{pmatrix}$を採用すればよい。