1　第一余弦定理

次の等式が成り立つ $\triangle\, ABC$ はどのような三角形か？

$$a\cos A + b\cos B = c\cos C \tag{1}$$

一般には以下のような解答をする。

$$a\cos A + b\cos B = \frac{a\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2bc} + \frac{b\left(c^2+a^2-b^2\right)}{2ca} = c\cos C = \frac{c\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2ab} \tag{2}$$

両辺に $2abc$ をかけて

$$a^2\left(b^2+c^2-a^2\right) + b^2\left(c^2+a^2-b^2\right) = c^2\left(a^2+b^2-c^2\right) \tag{3}$$

右辺から左辺を引いて

$$\begin{aligned} 0 &= a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 + b^2c^2 + b^2a^2 - b^4 - c^2a^2 - c^2b^2 + c^4 && (4)\\ &= 2a^2b^2 - a^4 - b^4 + c^4 && (5)\\ &= c^4 - \left(a^2-b^2\right)^2 && (6)\\ &= \left(c^2+b^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right) && (7)\\ \therefore a^2 &= b^2+c^2, b^2 = a^2+c^2 && (8) \end{aligned}$$

$\angle A$ もしくは$\angle B$ が直角の直角三角形

途中式までじっくりと目を通した人はどれくらいいるでしょうか？そんな人は殆どいないでしょう。なぜか？明らかに読むのが面倒だからです。まして書くとなればなおさら面倒です。どうにかしてもっと簡単にこの問題が解けないでしょうか？そこで**第一余弦定理**の出番です。

定理 1.1. 第一余弦定理

三角形 ABC について

$$\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B && (9)\\ b &= c\cos A + a\cos C && (10)\\ c &= a\cos B + b\cos A && (11) \end{aligned}$$

Proof. A から BC に下ろした垂線の足を H とするとき

$$\begin{aligned} a &= BH + CH = c\cos B + b\cos C \qquad (\angle B \text{ が鋭角のとき}) && (12)\\ a &= CH - BH = c\cos B + b\cos C \qquad (\angle B \text{ が鈍角とき}) && (13) \end{aligned}$$

□

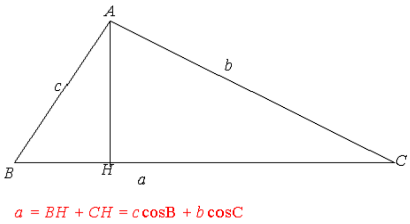

図 1

それでは先程の問題をもう一度。第一余弦定理を用いて

$$
\begin{align}
a\cos A + b\cos B &= (b\cos C + c\cos B)\cos A + (c\cos A + a\cos C)\cos B \tag{14}\\
&= c\cos C = (a\cos B + b\cos A)\cos C \tag{15}\\
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 2\cos A cos B = 0 \tag{16}\\
\cos A &= 0, cos B = 0 \tag{17}\\
&\therefore \angle A \text{ もしくは} \angle B \text{ が直角の直角三角形} \tag{18}
\end{align}
$$

おお早い。これなら計算ミスも少ないし、時間も大幅に節約できる。これからはどんどん**第一余弦定理**を活用していこう。